• Δίνεται η εξίσωση

$x^3-9x+2=0$

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά με τη μέθοδο N-R την αρνητική λύση της εξίσωσης με κατάλληλα επιλεγμένη αρχική τιμή (Κριτήριο διακοπής $|x_i-x_{i-1}|\leq 10^{-3}$)

<u>ΛΥΣΗ</u>

Από "N-R" $\rightsquigarrow$ $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (*)

με $f(x)=x^3-9x+2$

και $f'(x)=3x^2-9$

Στην (*) είναι:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-9x_k+2}{3x_k^2-9}=\frac{2x_k^3-2}{3x_k^2-9} \quad (**)$$

Λόγω ότι <u>δεν</u> μου δίνει αυτή τη φορά αρχική τιμή αλλά μου ζητά να την επιλέξω καταλλήλως.

Προφανώς θα πάρουμε τη μέθοδο διχοτόμησης που θα συγκλίνει <u>πάντα</u> στη ρίζα της εξίσωσης. Επομένως, θα προσεγγίσουμε την αρνητική λύση της $f(x)=0$ σε κάποιο αρνητικό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ όπου η f ορίζεται σε αυτό.

Το $[-4,-3]$ είναι κατάλληλο διότι

για μια συνεχή συνάρτηση όπως η f

$f(-3)=2$ και $f(-4)=-26$ $\xRightarrow{\text{ΘΕΤ}}$ $\exists\, x^* \in (-4,-3)$ ώστε $f(x^*)=0$

$sgn\, f(-3) \neq sgn\, f(-4)$

ΘΔΟ η x^* μοναδική

$f'(x)=3x^2-9 \rightsquigarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

το $[-4,-3] \subseteq (-\infty,-\sqrt{3})$

άρα η $f\uparrow$ στο $[-4,-3]$

άρα η x^* μοναδική

• $x_1 = \dfrac{-4-3}{2} = -\dfrac{7}{2} = -3,5$

$f(-3,5)=-9,375$ και $f(-3)=2$ στο $[-3.5,-3]$

άρα από Θ. Bolzano $\exists$ ρίζα στο $(-3.5,-3)$

• $x_2 = \dfrac{-3.5-3}{2} = -3,25$

Έστω $x_0=-3.25$ η αρχική τιμή της Μεθ. N-R

άρα στην $(**) \xrightarrow{k=0} x_1=-3.114$

άρα το σφάλμα

$|x_1-x_0| = |-3.114+3.25| = |0.14| > 10^{-3}$

στην $(**) \xrightarrow{k=1} x_2=-3.1055$

άρα το σφάλμα

$|x_2-x_1| = |-3.1055+3.114| = 8,5\cdot 10^{-3} > 10^{-3}$

στην $(**) \xrightarrow{k=2}$ $x_3 = -3.1054$

άρα το σφάλμα

$|x_3 - x_2| = 0.0001 = 0.1 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$